

Exercice 1. Soient A et B deux événements d'un espace de probabilité Ω tels que $A \cup B = \Omega$.

Montrer que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A^c)P(B^c).$$

Exercice 2. On extrait 8 cartes d'un jeu de 52 cartes (bien mélangées). Quelle est la probabilité que

- Quatre d'entre elles soient des as.
- Quatre d'entre elles soient des as, et deux soient des rois.
- Trois cartes aient la même couleur, et trois autres aient une autre même couleur (les "couleurs" sont pique, trèfle, carreaux et cœur).
- Au moins une carte soit un as.

Exercice 3. On mise un euro sur un nombre de 1 à 6, puis on lance 3 dés. Si le nombre sur lequel on a parié sort :

- 3 fois, on gagne quatre fois sa mise.
- 2 fois, on gagne trois fois sa mise.
- 1 fois, on gagne deux fois sa mise.
- 0 fois, on perd sa mise.

Définir l'espace de probabilité associé à l'expérience.

Soit X le gain lors d'une partie, déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 4. Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des chats résistants à une bactérie présente dans le lait et troublant leur sommeil. Des essais prouvent que :

- 95 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand le chat est effectivement résistant à la bactérie.
- 98 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand le chat n'est pas résistant à la bactérie.

À Paris, où il y a 3% de chats résistants à la bactérie, on pratique le test sur un chat choisi au hasard et on constate que le test donne un résultat positif. Quelle est la probabilité que ce chat soit effectivement résistant à la bactérie ?

Exercice 5. Un lot constitué d'un grand nombre d'articles doit être testé par prélèvement, aux fins de réception par l'acheteur. Un article peut être classé, après essai, en bon ou mauvais.

Le test est réglé de la façon suivante : on prend deux articles au hasard dans le lot. S'ils sont bons tous les deux, le lot est accepté. Si les deux sont mauvais, le lot est refusé. Si l'un est mauvais, l'autre bon, on tire de nouveau deux articles au hasard. Si ces deux derniers articles sont bons, le lot est accepté. Sinon, le lot est définitivement refusé.

On note p la proportion d'articles défectueux dans le lot (inconnue de la personne qui fait le test). Calculer la probabilité que le lot soit accepté.