**Feuille de TD 3**
Intégrales paramétrées

**Exercice 1 :**
Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
2. Montrer que $F$ est strictement décroissante et convexe.
3. Montrer que l'on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

**Exercice 2 :**
Soit $F$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + xe^t)\,dt$.

1. Montrer que $F$ est dérivable sur $[0, +\infty[$.
2. Donner une expression sans intégrale de $F'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

**Exercice 3 :**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$ converge.

   On définit l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$.
2. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\dfrac{x}{2}F(x)$.
4. En déduire une expression explicite de $F(x)$.

**Exercice 4 :**

1. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt$. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $F'(x)$. En déduire que $F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$ puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 5 :**
Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

1. Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt$.

**Exercice 6 :**
On pose $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ et pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,dt$.

1. Montrer que $F$ et $G$ sont bien définies et continues sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que $F(x) - F'(x) = 2\alpha/\sqrt{x}$.
3. Montrer que $G$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour $x > 0$, on a $G(x) - G'(x) = 1/\sqrt{x}$.
4. Pour tout $x \geqslant 0$ on pose $H(x) = \big(F(x) - 2\alpha G(x)\big)e^{-x}$.
   **a)** Montrer que pour $x > 0$, on a $H'(x) = 0$.
   **b)** Montrer que $H(0) = \pi - 4\alpha^2$.
   **c)** Montrer que $0 \leqslant F(x) \leqslant \pi$ et $0 \leqslant G(x) \leqslant 2\alpha$ pour tout $x \geqslant 0$.
   **d)** En déduire que $\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Exercice 7 :**
On définit une fonction $\varphi : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t) = \dfrac{\arctan(t)}{t}$ si $t > 0$. On pose pour tout $x \geqslant 0$ :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(xt)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que $\varphi$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $F$ est définie et continûment dérivable sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1[ \cup ]1,+\infty[$ : $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$.
   Indication : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on a : $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\Big(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\Big)$.
4. Cette expression de $F'(x)$ est-elle encore valide pour $x = 1$ ? (on répondra sans effectuer le moindre calcul).
5. Déduire de ce qui précède une expression de $F(x)$ sans intégrale.

**Exercice 8 :**
Soit $F$ et $G$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\Big(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\Big)\,dt$ et $G(x) = \Big(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du\Big)^2$.

1. Montrer que $F$ et $G$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F'(x) = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{\cos^2 t})}{\cos^2 t}\,dt, \qquad G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

.

2. En effectuant le changement de variable $u = x\tan(t)$ dans la dernière intégrale, en déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $G'(x) + F'(x) = 0$, puis que la fonction $F + G$ est constante. Déterminer cette constante.
3. Montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$ : $0 \leqslant e^{-x^2/\cos^2 t} \leqslant e^{-x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ puis la valeur exacte de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$