Université Paris 7 - L1 MASS- Probabilités finies et sondage (51MT1PF2) Examen du 22 juin 2011

Durée : 3 heures. Ni les documents ni les téléphones ne sont autorisés

Exercice 1. (2 points) Soit P la probabilité sur $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ telle que

$$P(\{k\}) = \alpha 2^k \quad \text{pour tout } k \in \Omega$$

où α est une constante.

(1) Calculer α.

(2) Calculer la probabilité de l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Exercice 2. (2 points) Soit Ω un ensemble non vide et soit $\omega_0 \in \Omega$. On définit l'application Q sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$Q(A) = 1_A(\omega_0) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

(1) Rappeler la définition d'une probabilité sur Ω.

(2) Montrer que Q est une probabilité sur Ω.

Exercice 3. (2 points) Dans une population, on sait que 36% des ménages possèdent un chien et 30% un chat. On sait également que 22% des ménages qui possèdent un chien ont aussi un chat.

(1) Quelle est la probabilité qu'un ménage tiré au hasard dans cette population possède à la fois un chien et un chat ?

(2) Quelle est la probabilité qu'un ménage possédant un chat, possède aussi un chien ?

Exercice 4. (4 points) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, P) à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 4\}$, et telle que

$$P(X = 0) = \frac{1}{16}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{16}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

(1) Calculer $P(X = 4)$.

(2) Déterminer l'espérance de X.

(3) Calculer la variance de X.

(4) Calculer $E\big(\sqrt{X}\big)$.

(5) On note Y la fonction indicatrice de l'événement $\{X \leq 2\}$:

$$Y = 1_{\{X \leq 2\}}.$$

Calculer la covariance de X et Y.

(6) Est-ce que X et Y sont indépendants ? Justifier votre réponse.

Exercice 5. (4 points) Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire au hasard successivement et sans remise les 9 jetons.

(1) Définir un espace de probabilité (Ω, P) correspondant à cette expérience.

(2) Quelle est la probabilité d'obtenir le jeton numéro 1 au premier tirage ?

(3) Quelle est la probabilité d'obtenir le jeton numéro 1 au dernier tirage ?

Exercice 6. (2 points) Soit n un entier plus grand que 1 et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements indépendants tels que

$$P(A_i) > 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que l'événement $A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n$ est non vide.

Exercice 7. (4 points) Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$, et telles que

$$P(X = 1) = \alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel dans }]0, 1[,$$

$$P(Y = 1) = 1/2.$$

On pose $Z = XY$.

(1) Déterminer la loi de Z.

(2) Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

(3) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

(4) Les variables aléatoires X, Y, Z sont-elles indépendantes ?