Feuille de TD 9

Résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Remarque préliminaire : Dans la suite, les systèmes différentiels sont considérés *réels*, c'est à dire que l'on cherchera (sauf indication contraire) une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions à valeurs réelles des systèmes homogènes. Les lettres x, y et z désignent des fonctions "inconnues" de la variable réelle.

Exercice 1 :

Soient a et b des réels.

1. *Montrer que la matrice suivante est diagonalisable :*

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

2. *Déduire de la première question les solutions à valeurs réelles du système suivant*

$$\begin{cases} x' = ax + by + bz \\ y' = bx + ay + bz \\ z' = bx + by + az \end{cases}$$

Exercice 2 :

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 3 :

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer son polynôme caractéristique et en déduire que M est diagonalisable.*
2. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = -2x + y + e^{-t} \\ y' = 4x + y + 3e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 4 :

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + 4t + 1 \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Exercice 5 :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z + t \\ y' = x + 2y - z + 2t \\ z' = x - y + 2z - t \end{cases}$$

Exercice 6 :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 13x - 20y - 10z - \cos t \\ y' = 15x - 22y - 10z - \cos t \\ z' = -15x + 20y + 8z + \cos t \end{cases}$$

Exercice 7 :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 3z - 6t + 1 \\ y' = 2x + 2y + 6z + 3t + 2 \\ z' = x + 2y + z + 1 \end{cases}$$

Exercice 8 :
On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.*
2. *En déduire les solutions à valeurs réelles du système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = x - 2y + \sin t \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Exercice 9 :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 7x - 4y + 2z \\ y' = 13x - 6y + 6z \\ z' = -3x + 2y \end{cases}$$

On cherchera d'abord l'ensemble des solutions à valeurs complexes, puis celui des solutions à valeurs réelles.

Exercice 10 (Cas d'une matrice non diagonalisable) :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

On trigonalisera pour cela la matrice associée à ce système.