

Feuille de TD 8
Matrices orthogonales et produit mixte

Exercice 1 :

Montrer que chacune des matrices suivantes représente une rotation de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , dont on déterminera l'axe et l'angle correspondant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Etudier les endomorphismes de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 représentés dans une base orthonormale par les matrices :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

S'il s'agit de rotations, en déterminer l'axe et l'angle.

Exercice 3 :

Diagonaliser dans une base orthonormée les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable sur une base orthonormée.
2. Construire une base orthonormée de \mathbb{R}^3 sur laquelle f se diagonalise.

Exercice 5 :

Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est diagonalisable sur une base orthonormée de \mathbb{R}^4 .
2. Construire une base orthonormée de \mathbb{R}^4 sur laquelle $f_{a,b}$ se diagonalise.

Exercice 6 :

On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est orthogonale.

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont M est la matrice dans la base canonique.

2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Construire une base orthonormée de \mathbb{R}^3 sur laquelle la matrice f est diagonale.

Exercice 7 :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans aucun calcul l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP$.
2. Calculer un tel couple de matrices (D, P) .

Exercice 8 :

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall z \in \mathbb{R}^3, \quad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$$

Exercice 9 :

Soient a et b deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Discuter et résoudre l'équation $a \wedge x = b$.

Exercice 10 :

Dans l'espace euclidien orienté \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2); v_2 = (-2, 2, k); w = v_1 \wedge v_2.$$

1. Sans calculer w , répondre aux questions suivantes :
 - (a) A quelle condition sur k a-t-on $w \neq 0$?
 - (b) A quelle condition sur k le système (v_1, v_2, w) est-il une base orthogonale de \mathbb{R}^3 ?
2. Calculer w .
3. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. A quelle condition sur k a-t-on $\dim(F) = 2$? Dans ce cas, donner une équation de F .

Exercice 11 :

Soit k un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 et soit R la rotation vectorielle d'angle θ et d'axe la droite vectorielle engendrée par k et orientée par k . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a

$$R(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)k \wedge x + 2\langle x, k \rangle \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)k.$$

Exercice 12 :

Déterminer les matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^3 des transformations suivantes :

1. Le retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 2, 1)$.

2. Le retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.
3. La rotation d'axe orienté $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 :

On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté \mathbb{R}^3 . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a, b, c]$ le produit mixte de a, b et c . Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes :

1. $s = [a + b, b + c, c + a]$.
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.