Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence de Physique , L2

Cours de Mathématiques-MP4
2010-2011, 2^{nd} semestre

Correction partielle du Test 2 bis

Étudier selon le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature (intégrable ou non) de l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

On note $f \colon t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Au voisinage de 0 on a l'équivalence :

$$f(t) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

Donc f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ c'est-à-dire $\alpha < 2$.
De plus, comme f est positive au voisinage de 0,

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$$

dès que $\alpha \geqslant 2$.
Au voisinage de $+\infty$, on a la majoration :

$$|f(t)| \leqslant \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$$

Donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $\alpha > 1$.
Supposons maintenant $\alpha \leqslant 1$, et montrons qu'alors f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$:
Pour $k \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{((k+1)\pi)^\alpha} = \frac{C}{(k+1)^\alpha}.\end{aligned}$$

Par critère de Riemann sur les séries, la suite $\left(\frac{C}{(k+1)^\alpha}\right)_{k\geqslant 1}$ n'est pas sommable car $\alpha \leqslant 1$.
Donc

$$\int_1^{N\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $\alpha \leqslant 1$.
Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha \in]1, 2[$.
Note : par contre $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand même vers une limite finie quand $A \to +\infty$ si $\alpha \in]0, 1]$, grâce critère de Leibniz sur les séries. (c'est-à-dire que l'intégrale impropre converge quand même bien que f ne soit pas intégrable).